



ce
pre
UNI

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1

Álgebra

TEMA

Sistemas de ecuaciones no lineales.
Sistemas de inecuaciones lineales y no lineales.



Sistemas de Ecuaciones no lineales (SENL)

Definición. Un SENL es aquel sistema de ecuaciones en el cual por lo menos una de las ecuaciones componentes es no lineal.

Ejemplos

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x^2 + xy = 4 \\ 4y^2 + 3xy = 15 \\ 3x^2 - 3y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2^y = 8 \\ y - \log_2 x = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} xy + x + y = 7 \\ xz + x + z = 11 \\ yz + y + z = 5 \end{cases}$$

Para resolver un SENL se puede emplear el método de eliminación, sustitución, artificios e inclusive el método gráfico. A continuación mediante ejemplos mostraremos algunos métodos a utilizar para un SENL con dos variables.

1. Una ecuación lineal y una ecuación cuadrática

Se despeja una incógnita de la ecuación de primer grado y se sustituye en la otra ecuación. Así, queda una ecuación de segundo grado con una sola incógnita.

Ejemplo. Resuelva en $\mathbb{R}^2$ el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 & \dots\dots (I) \\ x^2 - 2y^2 = 1 & \dots\dots (II) \end{cases}$$

Resolución

De (I) : $y = \frac{5 - 3x}{2} \dots\dots (III)$

En (II) : $x^2 - 2\left(\frac{5 - 3x}{2}\right)^2 = 1$

$$7x^2 - 30x + 27 = 0$$

$$\begin{array}{r} 7x & & -9 \\ & \times & \\ & x & -3 \end{array}$$

$$(7x - 9)(x - 3) = 0$$

$$x = 3 \vee x = \frac{9}{7}$$

En (III):

$$x = 3 \rightarrow y = -2$$

$$x = \frac{9}{7} \rightarrow y = \frac{4}{7}$$

$$CS = \left\{ (3; -2); \left(\frac{9}{7}; \frac{4}{7}\right) \right\}$$

2. Dos ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + by^2 = c$

Se pueden emplear los métodos para resolver un sistema de 2 ecuaciones lineales con dos incógnitas, en particular el análogo al método de eliminación.

Ejemplo. Resuelva en $\mathbb{R}^2$ el sistema:

$$\begin{cases} 5x^2 - 2y^2 = -27 & \dots\dots (I) \\ 2x^2 + 3y^2 = 50 & \dots\dots (II) \end{cases}$$

Resolución

$$(3) \cdot (I) : 15x^2 - 6y^2 = -81$$

$$(2) \cdot (II) : 4x^2 + 6y^2 = 100$$

$$19x^2 = 19$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x = -1 \vee x = 1$$

$$\text{En (I): } \begin{cases} x = -1 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = -4 \vee y = 4 \\ x = 1 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = -4 \vee y = 4 \end{cases}$$

$$CS = \{(-1; -4); (-1; 4)\{(1; -4); (1; 4)\}\}$$

3. Dos ecuaciones cuadráticas cuyos primeros miembros son homogéneos

En este caso, se puede resolver utilizando el cambio de variable $y=kx$

Ejemplo. Resuelva en $\mathbb{Q}^2$:

$$\begin{cases} 2x^2 + xy + y^2 = 4 & \dots\dots (I) \\ 3xy - 2y^2 = 1 & \dots\dots (II) \end{cases}$$

Resolución

Haciendo $y = kx \dots\dots (III)$

En (I) y (II) :
$$\begin{cases} 2x^2 + kx^2 + k^2x^2 = 4 \\ 3kx^2 - 2k^2x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (2 + k + k^2)x^2 = 4 & \dots\dots (IV) \\ (3k - 2k^2)x^2 = 1 \end{cases}$$

Dividiendo ambas ecuaciones:

$$\frac{2 + k + k^2}{3k - 2k^2} = 4 \rightarrow 9k^2 - 11k + 2 = 0$$

$$(k - 1)(9k - 2) = 0 \rightarrow k = 1 \vee k = \frac{2}{9}$$

- $k = 1$, en (IV): $x^2 = 1 \rightarrow x = 1 \vee x = -1$
 $x = 1$, en (III) $\rightarrow y = 1$
 $x = -1$, en (III) $\rightarrow y = -1$
- $k = \frac{2}{9}$, en (IV): $x^2 = \frac{81}{46} \rightarrow x \notin \mathbb{Q}$

$$CS = \{(1; 1); (-1; -1)\}$$

4. Dos ecuaciones simétricas

Estos sistemas no se alteran al permutar sus variables. Estos sistemas se pueden resolver utilizando el cambio de variable:

$$x = u + v$$

$$y = u - v$$

Ejemplo. Resuelva en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x + y = 6 & \dots\dots (I) \\ x^4 + y^4 = 272 & \dots\dots (II) \end{cases}$$

Resolución

Haciendo: $\begin{cases} x = u + v & \dots\dots (III) \\ y = u - v \end{cases}$

En (I): $2u = 6 \rightarrow u = 3$

$$x = 3 + v$$

$$y = 3 - v$$

En (II): $(3 + v)^4 + (3 - v)^4 = 272$

$$2v^4 + 108v^2 + 162 = 272$$

$$v^4 + 54v^2 - 55 = 0$$

$$(v^2 - 1)(v^2 + 55) = 0$$

$$v^2 = 1 \quad v^2 = -55$$

$$v = \pm 1 \quad v \notin \mathbb{R}$$

En (III): $CS = \{(4; 2); (2; 4)\}$

Otros sistemas no lineales

Para los siguientes sistemas el estudiante hará suposiciones, cambios de variables, estrategias no contempladas hasta este instante, y otros artificios para determinar el conjunto solución respectivo.

Ejemplo. Resuelva en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 & \dots\dots (I) \\ x^2 + y^2 = 41 & \dots\dots (II) \end{cases}$$

Resolución

$$(I)^2: 2x + 2\sqrt{x^2 - y^2} = 16$$

$$x + \sqrt{x^2 - y^2} = 8 \dots\dots (III)$$

$$\text{De (II): } y^2 = 41 - x^2$$

$$\text{En (III): } x + \sqrt{2x^2 - 41} = 8$$

$$\sqrt{2x^2 - 41} = 8 - x$$

$$2x^2 - 41 = 64 - 16x + x^2$$

$$x^2 + 16x - 105 = 0$$

$$(x - 5)(x + 21) = 0$$

$$x = 5 \vee x = -21 \rightarrow x = 5$$

$$\text{En (II): } y = \pm 4$$

$$\text{C. S} = \{(5; 4); (5; -4)\}$$

Ejemplo. Resuelve en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \log_2(x+y) - \log_2(x-y) = 1 & \dots\dots (I) \\ x^2 - y^2 = 2 & \dots\dots\dots (II) \end{cases}$$

Resolución

$$\text{De (I): } x+y > 0 \wedge x-y > 0 \dots\dots (*)$$

$$\log_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = 1$$

$$\frac{x+y}{x-y} = 2$$

$$x = 3y \dots\dots (III)$$

$$\text{En (II): } 8y^2 = 2$$

$$y = \frac{1}{2} \vee y = -\frac{1}{2}$$

- $y = \frac{1}{2}$, en (III): $x = \frac{3}{2}$

- $y = -\frac{1}{2}$, en (III): $x = -\frac{3}{2}$

$$\text{En (*): } x = \frac{3}{2}; y = \frac{1}{2}$$

$$C.S = \left\{ \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right) \right\}$$

Ejemplo. Resuelve en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} e^x - y = e^y - x & \dots\dots (I) \\ 3x^2 - y^2 = 2 & \dots\dots\dots (II) \end{cases}$$

Resolución: Observe que $f(x) = e^x + x$ es inyectiva

De (I): $e^x + x = e^y + y$

$f(x) = f(y)$ si y solo si $x = y$, luego
reemplazando $y = x$ en (II)

$$3x^2 - x^2 = 2$$

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

Por lo tanto

$$C.S = \{(1; 1), (-1; -1)\}$$

Ejemplo. Resuelve en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 4} + \sqrt{z^2 + 9} = 10 \end{cases}$$

Resolución:

ce
pre
UNI

Ejemplo. Resuelve en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 1 \\ 2xy = z^2 + \frac{5}{4} \end{cases}$$

Resolución:

ce
pre
UNI

Ejercicios

1) Resuelva en $\mathbb{R}^2$, el sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

e indique la suma de los valores de y.

- A) -5/4 B) -1/4 C) 3/4 D) 5/4 E) -2

2) Resuelva en $\mathbb{Q}^2$, el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5x = 3 \\ x^2 - 2y^2 - xy = 0 \end{cases}$$

e indique la suma de los mayores valores de x e y.

- A) 3/2 B) 7/2 C) 5/2 D) 2 E) 3

3) Resuelva en $\mathbb{R}^2$, el sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2\sqrt{xy} = 36 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

Calcule $E = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$

- A) $\sqrt{5}/3$ B) $\sqrt{5}/2$ C) $\sqrt{5}/4$ D) $\sqrt{5}/5$ E) $\sqrt{5}/6$

Inecuación con dos variables sobre K^2 ($\mathbb{R}^2, \mathbb{Q}^2, \mathbb{Z}^2$ o $\mathbb{N}^2$)

Definición. Sea $f(x; y)$ una expresión matemática. Se denomina inecuación con dos variables a la desigualdad

$$f(x; y) > 0 \quad \dots\dots (I)$$

(El signo $>$, puede ser reemplazado por: $\geq, <$ o $\leq$)

Llamaremos una solución de (I), al par ordenado $(x_0; y_0) \in K^2$, tal que se verifica:

$$f(x_0; y_0) > 0$$

El conjunto solución (CS) de (I), es el conjunto :

$$CS = \{(r; s) \in K^2 \mid f(r; s) > 0\}$$

Algoritmo de resolución (caso $\mathbb{R}^2$)

1. Reemplazar el signo de la desigualdad por el de igualdad y dividir el plano cartesiano tomando como frontera la gráfica que representa la ecuación obtenida.
2. Elegir puntos de prueba en cada región del paso 1, y verificar si satisfacen la inecuación dada.
3. El CS será la unión de todas las regiones que contienen algún punto de prueba que satisface la inecuación (I).
4. Si la inecuación (I) es no estricta ($\leq$ o $\geq$), la frontera pertenece al CS, caso contrario ($<$ o $>$) tal frontera no es parte del CS.

Inecuación lineal con dos variables

Es una expresión de la forma: $ax + by > c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ ó $b \neq 0$.
El signo $>$, puede ser reemplazada por: $\geq, <$ o $\leq$.

Ejemplo sobre $\mathbb{R}^2$

Represente gráficamente la solución de la inecuación $2x + 5y > 10$

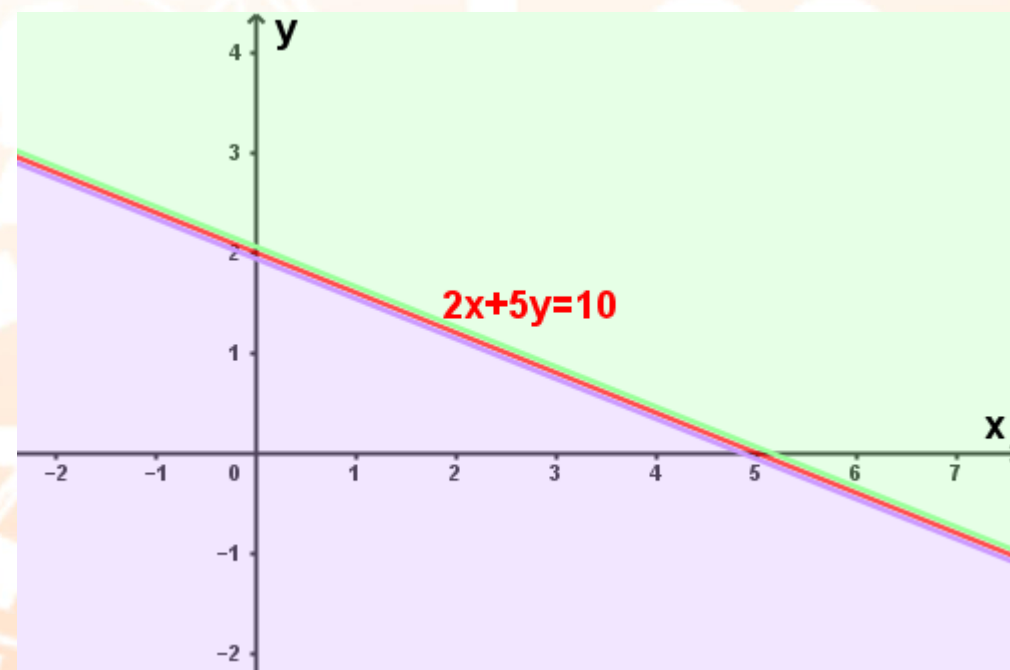
Resolución

Primero graficamos la ecuación de la frontera

$$2x + 5y = 10$$

x	y
0	2
5	0

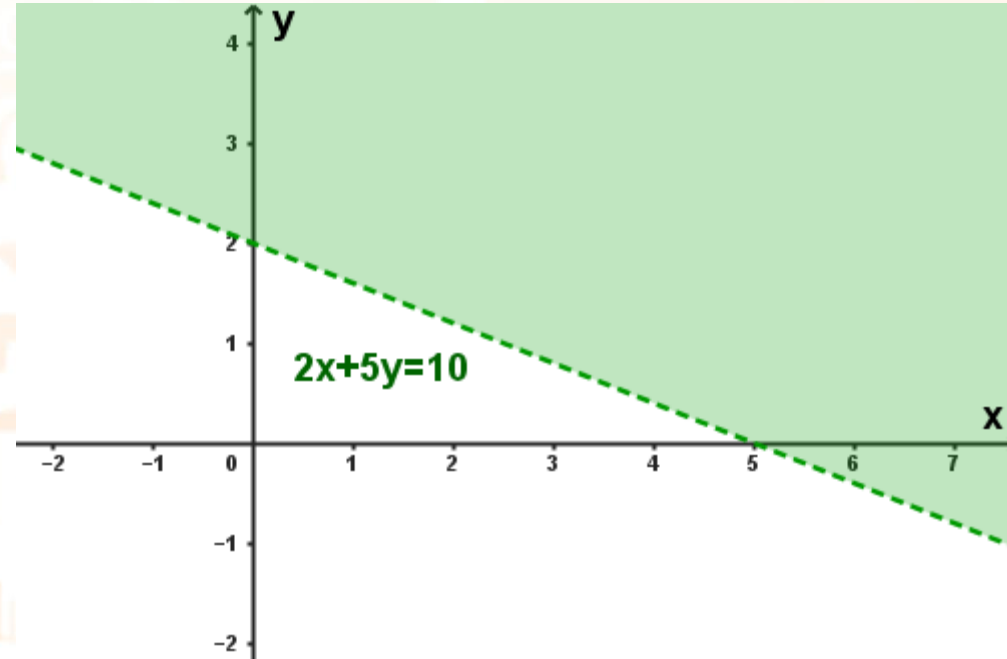
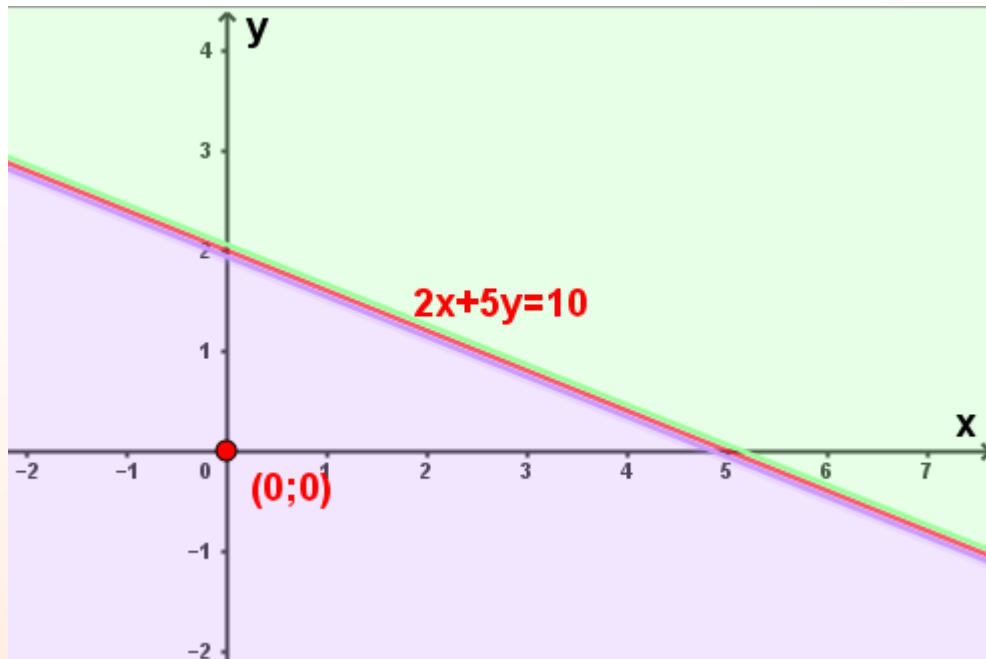
La cual como observamos divide el plano cartesiano en dos semiplanos.



Tomamos como punto de prueba el origen $(0; 0)$ de la región inferior.

Como dicho punto no satisface la inecuación $2x + 3y > 10$

Concluimos que el conjunto solución es el semiplano superior que no contiene el origen de coordenadas.



Sistema de inecuaciones lineales con dos variables sobre K^2

Un sistema de n inecuaciones lineales con 2 variables tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y > c_1 \\ a_2x + b_2y > c_2 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny > c_n \end{cases}$$

Donde $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ $a_i \neq 0$ ó $b_i \neq 0$.

El signo $>$, puede ser reemplazada por:

$\geq, < \text{ o } \leq$.

El par ordenado $(x_0; y_0) \in K^2$, es solución del sistema de inecuaciones si y solo si satisface cada inecuación del sistema.

El conjunto solución (CS) del sistema de inecuaciones lineales, es el conjunto:

$$CS = \{(x; y) \in K^2 / (x; y) \text{ es solución de cada inecuación}\}$$

Gráficamente, el conjunto solución del sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es la región del plano que se obtiene al intersectar los semiplanos que representan el conjunto solución correspondiente a cada una de las inecuaciones.

Ejemplo

Represente gráficamente la solución del sistema:
$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ x - y < 8 \end{cases}$$

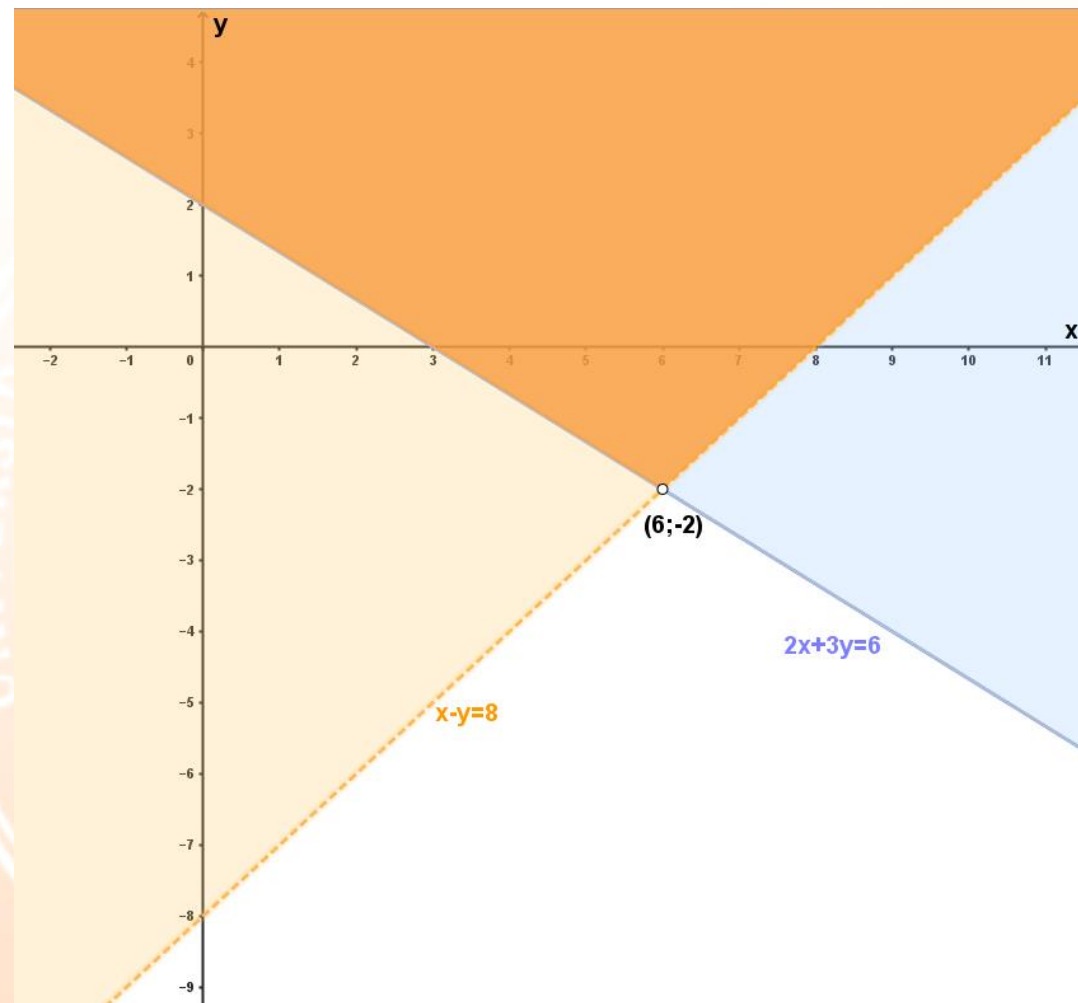
Resolución

$$2x + 3y = 6$$

x	y
0	2
3	0

$$x - y = 8$$

x	y
0	-8
8	0



Ejemplo

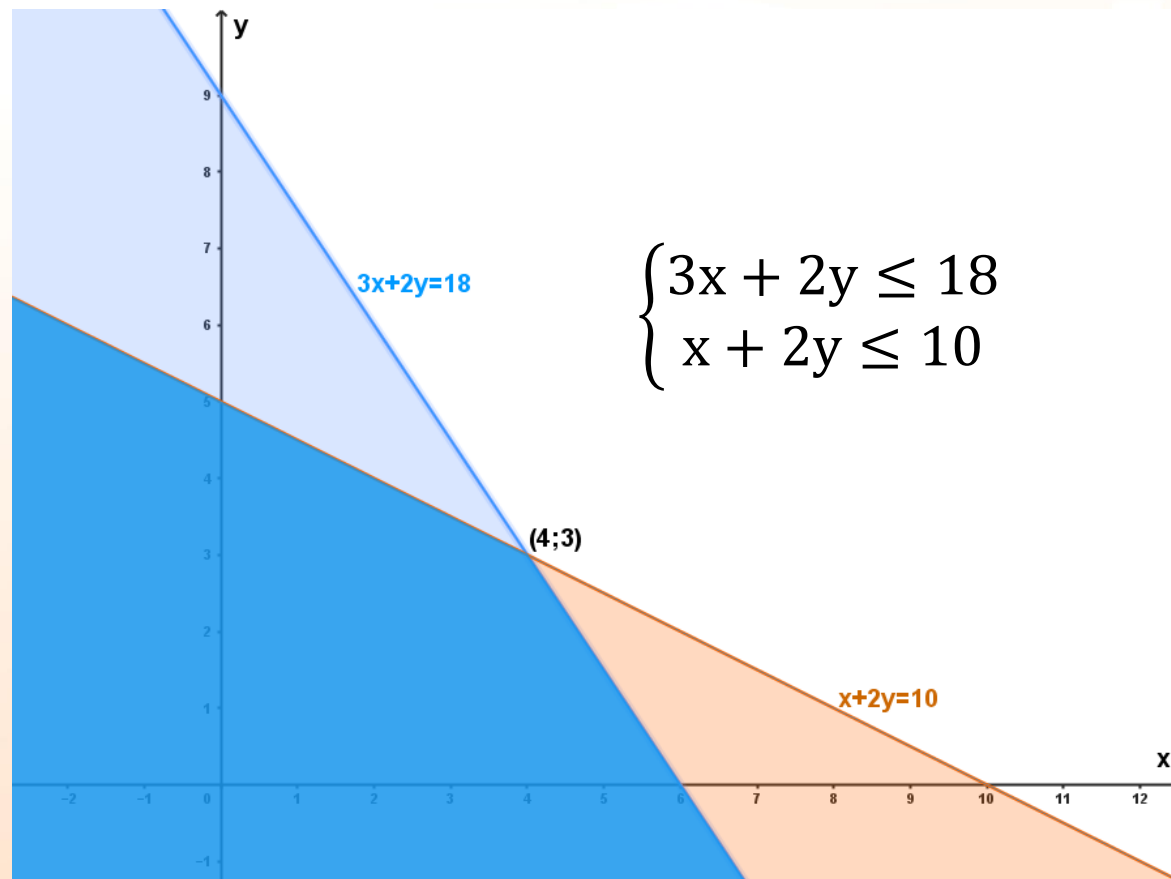
Represente gráficamente la solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 18 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Resolución

$$3x + 2y = 18$$

x	y
0	9
6	0

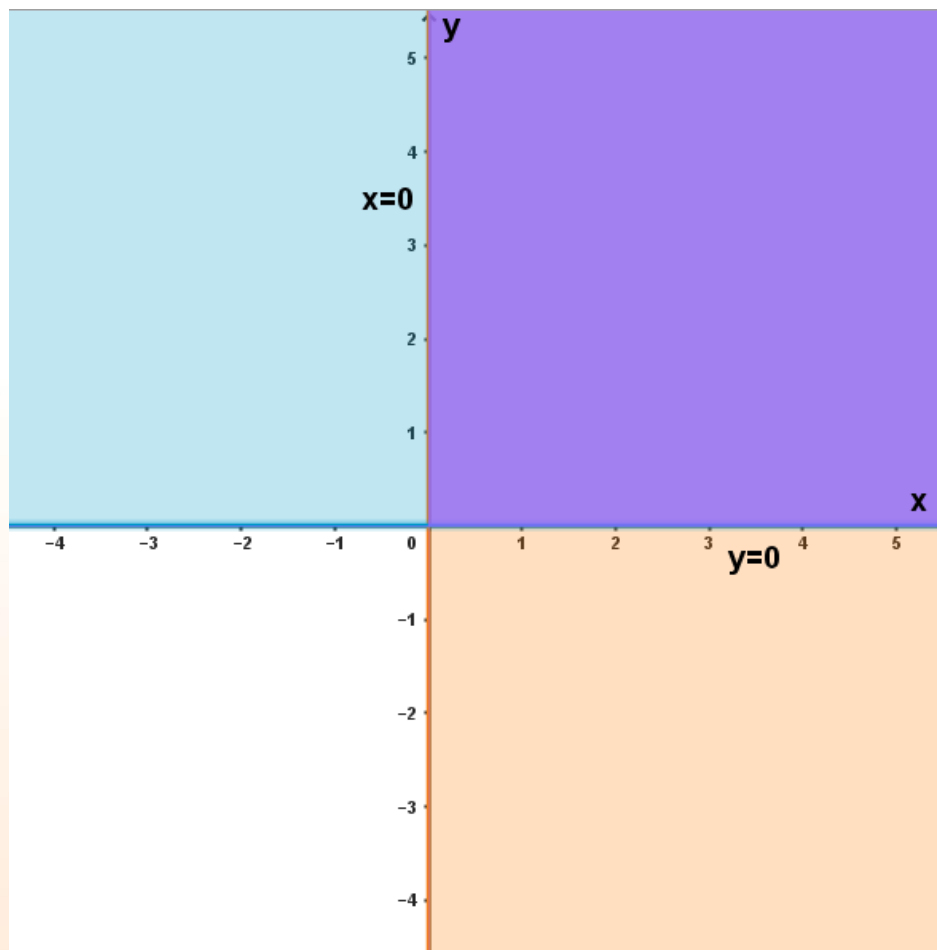


$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 18 \\ x + 2y \leq 10 \end{cases}$$

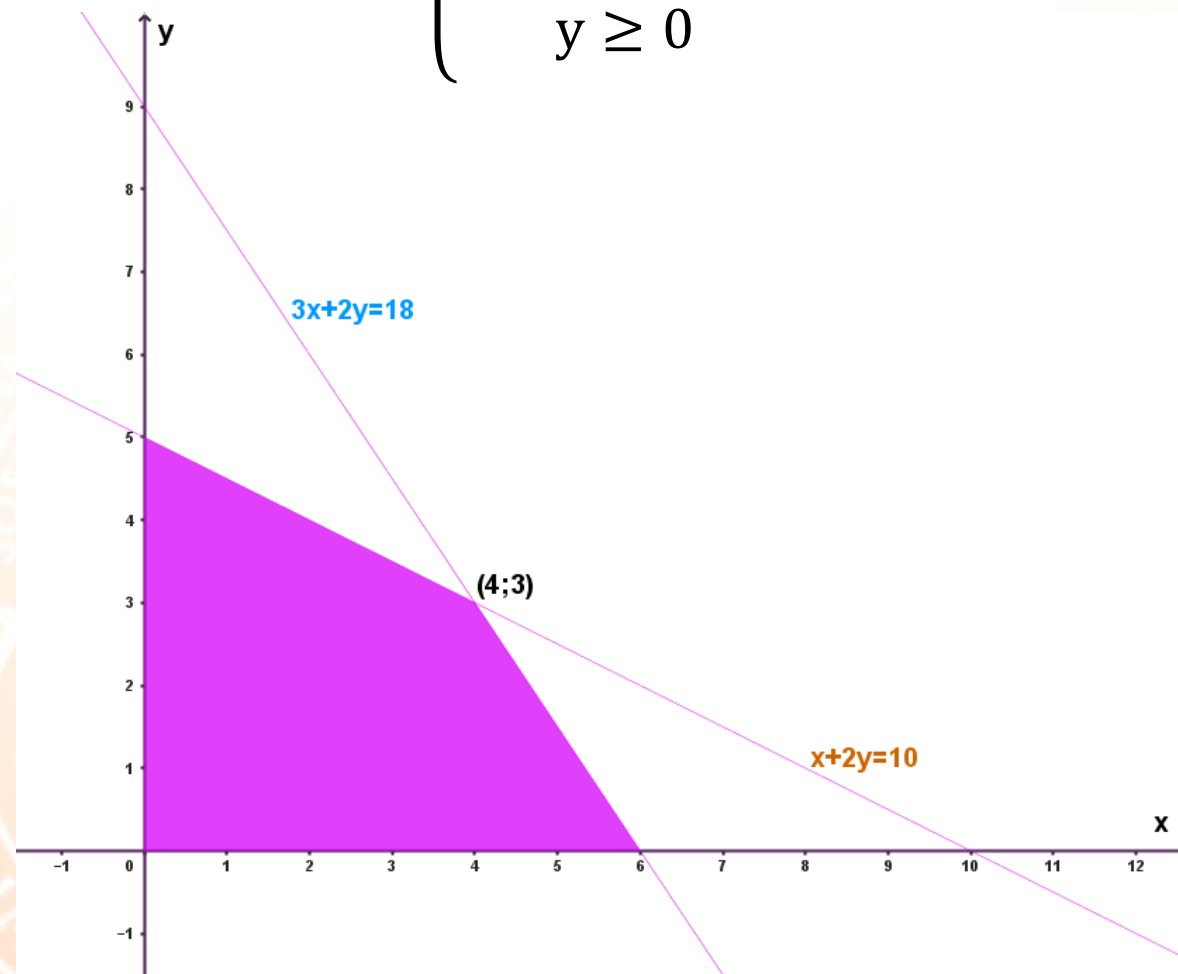
$$x + 2y = 10$$

x	y
0	5
10	0

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 18 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Ejemplo sobre $\mathbb{Z}^2$

Si x e y son números enteros que verifican el sistema:

$$\begin{cases} -2x + 3y > 5 & \dots\dots (I) \\ x + y > 5 & \dots\dots (II) \\ x + 2y < 11 & \dots\dots (III) \end{cases}$$

Halle xy .

Resolución

De (I) : $-2x + 3y > 5$

(2). (II): $2x + 2y > 10$
 $\hline y > 3 \dots\dots (*)$

(-1). (II): $-x - y < -5$

De (III) : $x + 2y < 11$
 $\hline y < 6 \dots\dots (**)$

De (*) y (**): $y = 4 \vee y = 5$

• $y = 4$ En (I), (II) y (III):

$$\begin{cases} x < 3,5 \\ x > 1 \\ x < 3 \end{cases} \rightarrow 1 < x < 3 \rightarrow x = 2$$

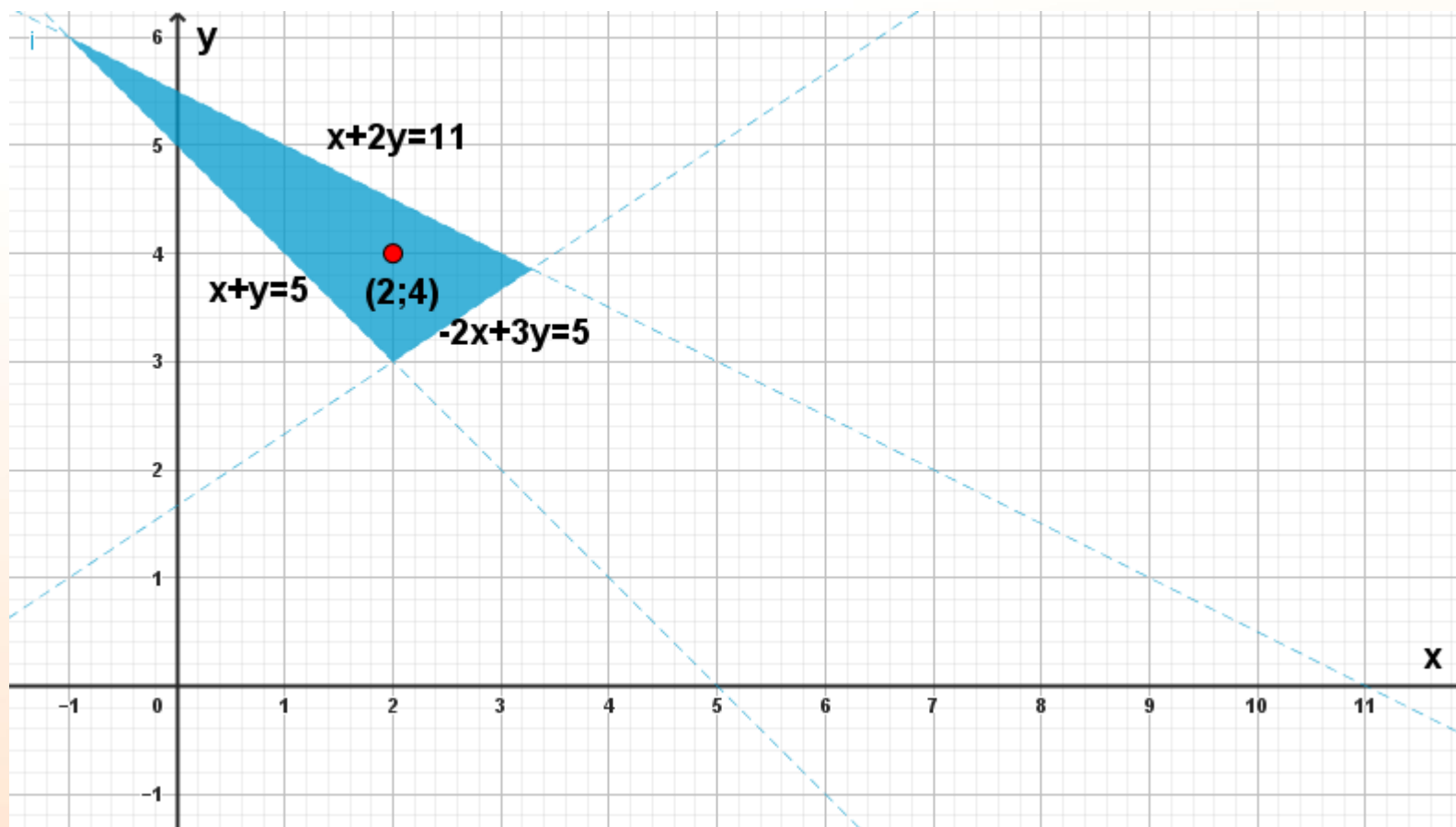
• $y = 5$ En (I), (II) y (III):

$$\begin{cases} x < 5 \\ x > 0 \\ x < 1 \end{cases} \rightarrow 0 < x < 1 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{Z}$$

$\therefore CS = \{(2; 4)\} \quad xy = 8$

De forma geométrica:

$$\begin{cases} -2x + 3y > 5 \\ x + y > 5 \\ x + 2y < 11 \end{cases}$$



Sistema de inecuaciones lineales con tres variables

Un sistema de n inecuaciones lineales con 3 variables tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z > d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z > d_2 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny + c_nz > d_n \end{cases}$$

Donde a_i, b_i, c_i y $d_i \in \mathbb{R}$; a_i, b_i y c_i no pueden ser cero al mismo tiempo.

El signo $>$, puede ser reemplazada por:
 $\geq, < \text{ o } \leq$.

Las pautas a seguir son idénticas a las del caso de dos incógnitas, sólo hay que tener en cuenta que cada inecuación representa ahora un semiespacio y no un semiplano.

Es decir que gráficamente, el conjunto solución sería la región del espacio tridimensional que se obtiene al intersectar los semiespacios que representan el conjunto solución correspondiente a cada una de las inecuaciones.

Ejemplo

Si $\{x; y; z\} \subset \mathbb{N}$. Halle el conjunto solución del siguiente sistema de inecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x + y + z > 14 & \dots\dots(I) \\ x - y + z < 6 & \dots\dots(II) \\ y < z & \dots\dots(III) \\ z < 7 & \dots\dots(IV) \end{cases}$$

Resolución

De (I) : $\cancel{x} + y + \cancel{z} > 14$

$(-1) \cdot (II): -\cancel{x} + y - \cancel{z} > -6$

$$y > 4 \dots\dots (*)$$

De (III): $y - \cancel{z} < 0$

De (IV): $\cancel{z} < 7$

$$y < 7 \dots\dots (**)$$

De (*) y (**):

$$y = 5 \vee y = 6$$

- $y = 5$

En (III) y (IV):

$$\begin{cases} z > 5 \\ z < 7 \end{cases} \rightarrow z = 6$$

En (I) y (II):

$$\begin{cases} x > 3 \\ x < 5 \end{cases} \rightarrow x = 4$$

- $y = 6$

En (III) y (IV):

$$\begin{cases} z > 6 \\ z < 7 \end{cases} \rightarrow \nexists x \in \mathbb{N}$$

$$CS = \{(4; 5; 6)\}$$

Sistema de inecuaciones no lineales.

Ejemplo

Represente gráficamente el conjunto solución (sobre $\mathbb{R}^2$) del siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} |y| \geq |x| \\ |x| + |y| \leq 3 \end{cases}$$

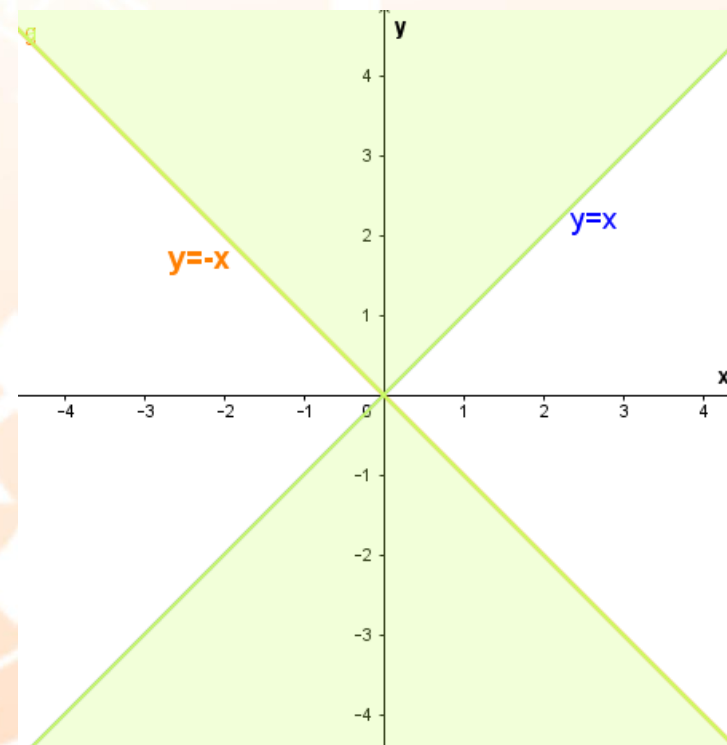
Resolución

a) $|y| \geq |x|$

Ecuación de la frontera: $|y| = |x|$

$$y = x \quad \vee \quad y = -x$$

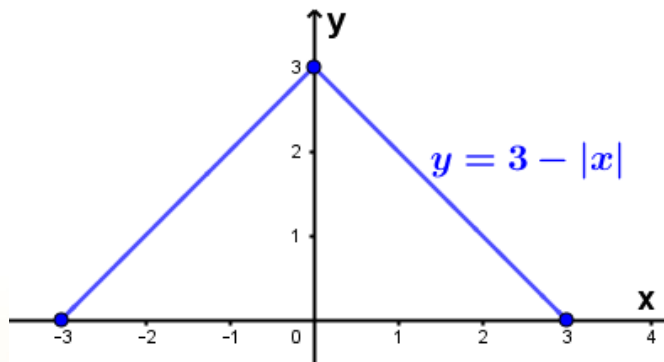
Tomando convenientemente puntos de prueba en las regiones determinadas, se concluye que el conjunto solución es la región que se muestra en la figura.



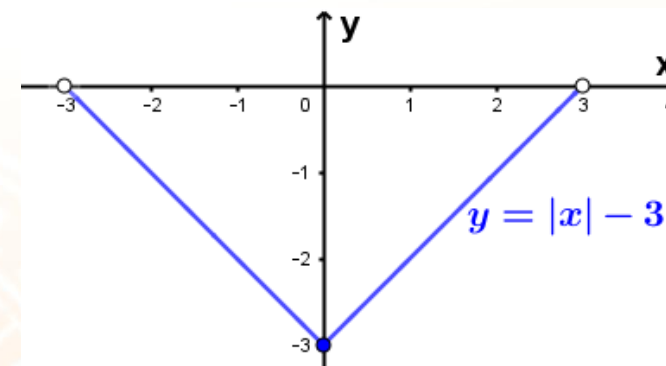
b) $|x| + |y| \leq 3$

Ecuación de la frontera: $|x| + |y| = 3$

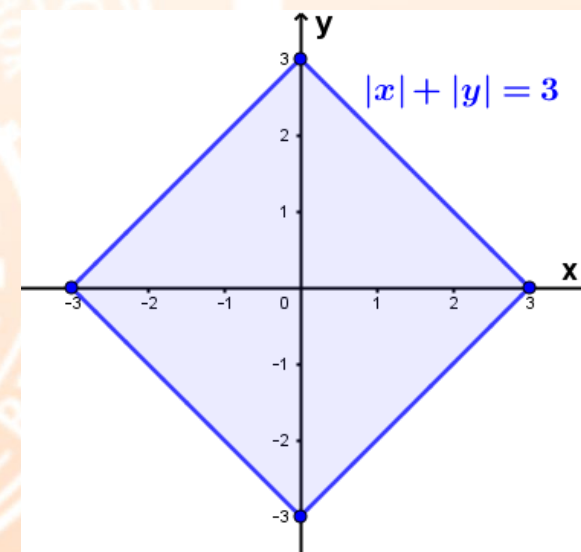
- $y \geq 0: y = 3 - |x|$



- $y < 0: y = |x| - 3$

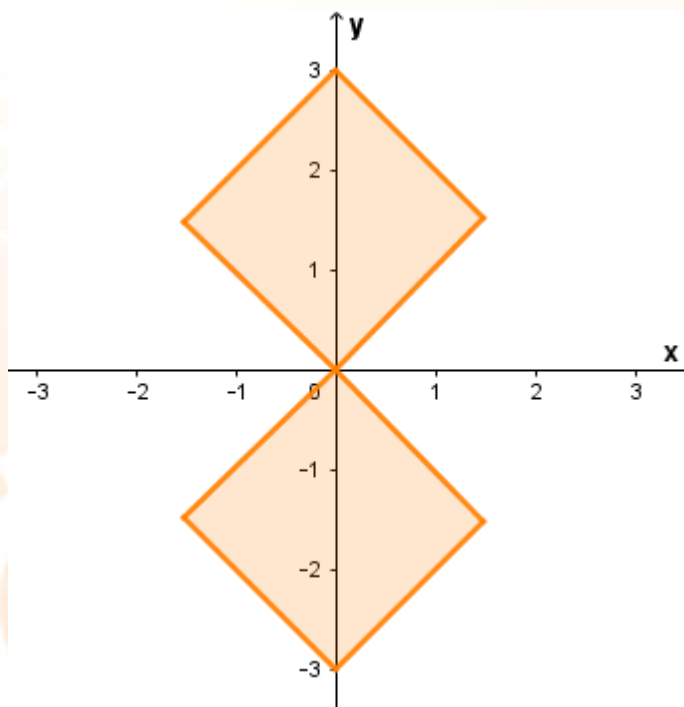
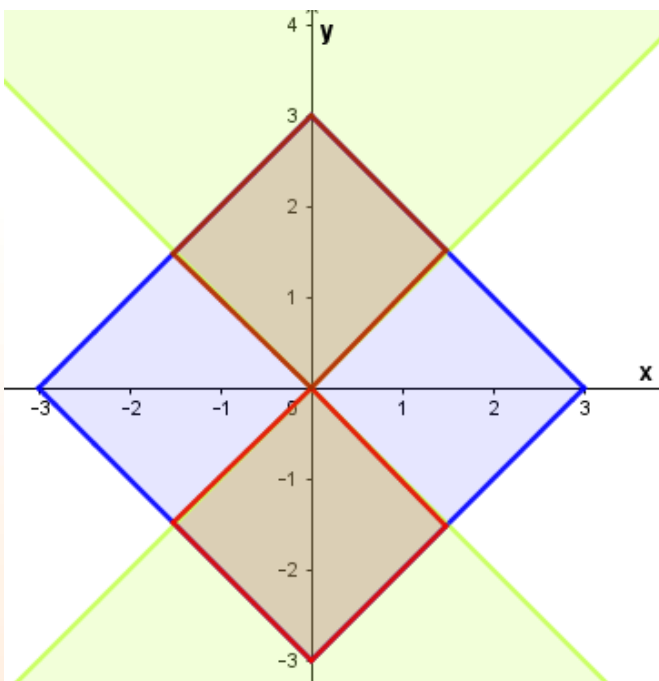


Uniendo las graficas anteriores y tomando como punto de prueba el origen $(0; 0)$ se concluye que el conjunto solución es la región interior al cuadrado.



Intersectando las regiones de **a)** y **b)**, se obtiene la representación grafica del conjunto solución del sistema de inecuaciones dado.

$$\begin{cases} |y| \geq |x| \\ |x| + |y| \leq 3 \end{cases}$$



Ejemplo

Halle las soluciones enteras del siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} y \leq \ln x \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Resolución

a) $y \leq \ln x$

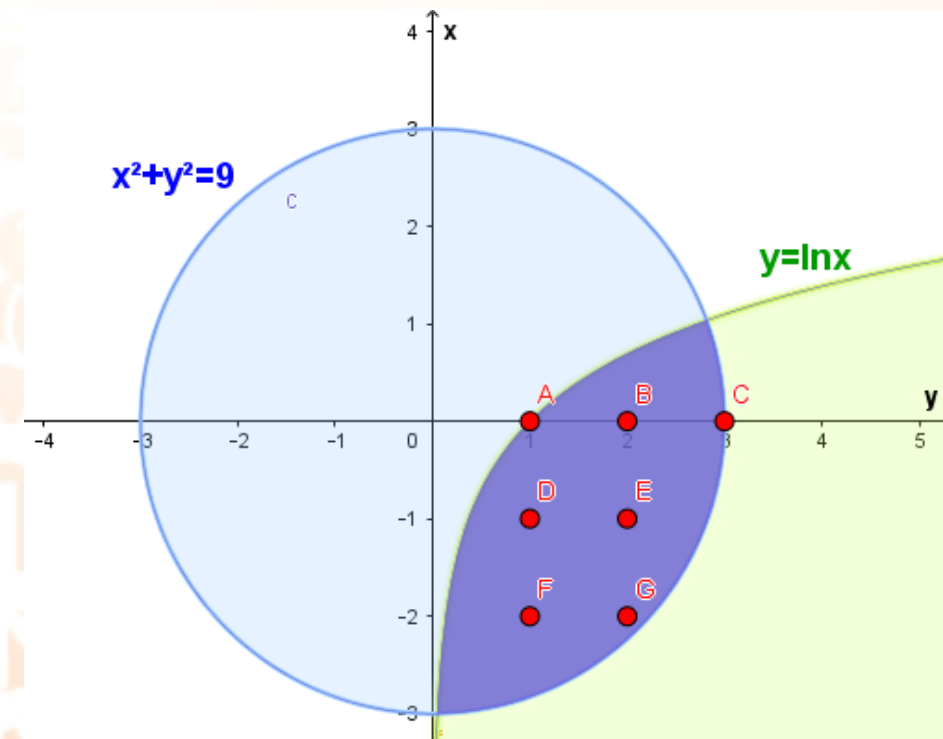
Ecuación de la frontera: $y = \ln x$

b) $x^2 + y^2 \leq 9$

Ecuación de la frontera: $x^2 + y^2 = 9$

Soluciones enteras:

$$CS = \{(1; 0); (2; 0); (3; 0); (1; -1); (2; -1); (1; -2); (2; -2)\}$$



Ejemplo

Graficar la región que se obtiene:

$$|x + y| + |x - y| \leq 2$$

Resolución



Ejercicios

1) Halle el área de la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ 2x - y \leq 4 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

A) $2u^2$

B) $3u^2$

C) $4u^2$

D) $5u^2$

E) $6u^2$

2) Resuelva en $\mathbb{N}^3$, el sistema:
$$\begin{cases} x + 2y + z < 15 \\ x - 2y > 0 \\ y + 2z > 4z \\ y > 2 \end{cases}$$
 y halle $M = \frac{xy}{z}$

A) 5

B) $11/2$

C) 6

D) $3/7$

E) 21

3) Halle el numero de soluciones enteras del sistema:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x + y \geq 3 \end{cases}$$

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6